Análisis y Enfoques

Unidad 2 | Sesión 2: Gráficos - Uso de CPG para hallar raíces e intersecciones

DEL CUADERNILLO DE FÓRMULAS

2.2 Raíces de una ecuación	$f(x) = 0 \implies$ Puntos de la forma $(x_i, 0)$
2.2 Intersección de gráficos	$f(x) = g(x) \implies$ Coordenadas comunes $(x_{\text{int}}, y_{\text{int}})$

CONEXIÓN TDC: Si la calculadora de pantalla gráfica (GDC) nos proporciona valores decimales aproximados de raíces irracionales que no podemos resolver analíticamente mediante álgebra exacta, ¿representa la tecnología digital una extensión válida de nuestra capacidad para conocer verdades matemáticas objetivas, o introduce una desconexión metodológica al sustituir la deducción pura por la aproximación algorítmica?

DESEMPEÑOS ESPERADOS

- **Ajustar** y configurar de manera óptima la ventana de visualización gráfica (V-Window) para observar todas las características clave de una función.
- **Calcular** con precisión las raíces (x-intercepts) de ecuaciones complejas utilizando las herramientas automáticas de resolución de la GDC.
- **Determinar** las coordenadas exactas de los puntos de intersección entre diferentes modelos de funciones que interactúan en un plano cartesiano común.
- **Escribir** correctamente los planteamientos algebraicos previos a la resolución numérica por GDC, respetando los criterios de presentación oficial del IB.

PRÁCTICA DE ANDAMIAJE

20 min

1. Plantee la ecuación matemática que debe resolverse para hallar las raíces de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2$.
2. Escriba la igualdad matemática que define los puntos de intersección de las curvas $y = e^x$ e $y = 3 - x^2$.
3. Sabiendo que una gráfica corta al eje horizontal en $x = 1{,}456$ y $x = -3{,}204$, escriba estas raíces redondeadas a tres cifras significativas (3 c.s.).
4. Determine analíticamente los interceptos con el eje x de la función parabólica $f(x) = x^2 - 5x + 6$ como paso previo de control antes de usar la GDC.
5. Explique qué configuración de la ventana gráfica (V-Window) cambiaría si una gráfica de parábola tiene su vértice en el punto $(2, -45)$ y no es visible en el eje vertical estándar.
6. Sabiendo que $f(x) = g(x)$ tiene como solución de abscisa $x = 2{,}15$, calcule la ordenada del punto de intersección común si $f(x) = 3x + 1$.

7. Identifique cuál herramienta del menú de análisis gráfico utilizaría para buscar el punto más bajo de un valle en una curva.

8. Un modelo lineal y uno exponencial se intersectan en dos puntos. Si la GDC solo le muestra un punto en pantalla, explique qué acción geométrica debe tomar en su calculadora para hallar el segundo punto.

9. Establezca el número máximo de posibles raíces reales que puede tener una función polinómica de grado 4:
$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

10. Interprete el significado del mensaje de error `No Solution` (o equivalente) de la GDC al intentar calcular la intersección entre las rectas de ecuaciones
$$y = 2x + 3 \quad \text{e} \quad y = 2x - 5.$$

PREGUNTAS DE PRUEBA 1 (Sin GDC)

30 min

Sección A

Pregunta 1 [6 pts]

Dadas las funciones algebraicas definidas por $f(x) = x^2 - 3x - 4$ y $g(x) = 2x + 2$, definidas para $x \in \mathbb{R}$.

(a) Plantee la ecuación cuadrática correspondiente que resulta al igualar ambas funciones para buscar sus puntos comunes. [2]

(b) Resuelva la ecuación anterior analíticamente mediante factorización. [2]

(c) A partir de los valores de x hallados en el apartado (b), escriba las coordenadas completas (x, y) de los dos puntos de intersección entre las gráficas de f y g. [2]

Pregunta 2 [6 pts]

La gráfica de la función cuadrática $h(x) = a(x - 2)(x - 6)$ corta al eje x en dos puntos, y tiene su punto máximo local en el vértice de la parábola.

(a) Escriba el valor exacto de las dos raíces de la ecuación $h(x) = 0$. [2]

(b) Por razones de simetría de la curva, el vértice ocurre en el punto medio entre las raíces. Halle la coordenada x del vértice de esta parábola. [2]

(c) Sabiendo que el vértice de la parábola está en el punto $(4, 8)$, determine el valor de la constante real a. [2]

Pregunta 3 [6 pts]

Considere la función cúbica $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) Muestre que la función se puede expresar de la forma factorizada $f(x) = (x-1)(x+1)(x-4)$ mediante la agrupación de términos. [3]

(b) Halle de manera exacta todas las raíces de la ecuación $f(x) = 0$. [2]

(c) Escriba las coordenadas de los tres puntos donde la gráfica de $f(x)$ intersecta al eje horizontal x. [1]

Pregunta 4 [5 pts]

Considere las ecuaciones de las curvas $y_1 = \sqrt{2x+9}$ e $y_2 = x + 3$.

(a) Formule la ecuación de una sola variable para hallar la intersección entre las curvas y elimine el radicando elevando al cuadrado. [2]

(b) Demuestre analíticamente que el punto $x = 0$ es la única solución real de la ecuación obtenida en (a) que satisface las restricciones de dominio de las funciones originales. [3]

Sección B

Pregunta 5 [13 pts]

Un analista matemático estudia la interacción de dos modelos físicos. El primero viene dado por la curva cúbica $f(x) = x^3 - 3x^2$ y el segundo por la recta $g(x) = 4x$ para $x \in \mathbb{R}$.

(a) Plantee la ecuación de intersección de la forma $f(x) = g(x)$ y exprésela como una ecuación polinómica igualada a cero. [2]

(b) Factorice la ecuación anterior extrayendo la variable común x y halle de forma exacta las tres raíces de la ecuación. [4]

(c) Utilizando los valores de las raíces halladas anteriormente:

(I) Escriba las coordenadas (x, y) de los tres puntos de intersección entre las curvas. [3]

(II) Bosqueje las gráficas de ambas funciones en un único plano cartesiano, señalando claramente los puntos de intersección comunes y los interceptos con el eje horizontal de cada función. [4]

CONFIGURACIÓN CASIO fx-CG50

Domina las herramientas esenciales de tu **Casio fx-CG50** para optimizar tu tiempo en las pruebas del Bachillerato Internacional:

1. ANÁLISIS EN EL MENÚ GRAPH (`MENU` → `5`)

- **Ingreso de funciones:** Ingrese sus curvas en `Y1`, `Y2`, etc. Confirme con `EXE` y pulse `F6` (DRAW).
- **Ajuste de Ventana (V-Window):** Presione `SHIFT` → `F3` (V-Window). Modifique manualmente los límites (`Xmin`, `Xmax`, `Ymin`, `Ymax`) o use preajustes rápidos como `F1` (INIT) para escala simétrica 10x10, o `F5` (AUTO) para ajustar el rango del eje vertical automáticamente.
- **Menú Solver Gráfico (G-Solv):** Una vez dibujadas las curvas, pulse `F5` (G-Solv):
  - `F1` (ROOT): Calcula los interceptos con el eje x ($f(x) = 0$). Desplácese entre múltiples raíces usando las flechas direccionales izquierda y derecha (◁ / ▷).
  - `F5` (INTSECT): Identifica automáticamente los puntos de intersección de las curvas activas ($f(x) = g(x)$). Si hay más de una intersección, alterne con las flechas.
  - `F2` (MAX) / `F3` (MIN): Halla los puntos de inflexión máximos y mínimos locales indispensables para calcular recorridos prácticos en problemas contextualizados.
  - `F6` → `F1` (Y-CAL) / `F2` (X-CAL): Calcula coordenadas de un punto específico ingresando el valor de la variable contraria.

2. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES COMPLEJAS EN EL MENÚ EQUA (`MENU` → `A`)

- **Menú Polinómico (`F2` → Polynomial):** Ideal para hallar raíces complejas o exactas de polinomios de grado 2 a 6 de forma instantánea. Ingrese el grado, complete la matriz de coeficientes ($a, b, c \ldots$) y presione `F1` (SOLVE).
- **Menú Solver General (`F3` → Solver):** Permite escribir ecuaciones algebraicas de una variable no lineales. Ingrese la ecuación completa utilizando el signo igual (`SHIFT` → `.` para escribir =). Coloque el cursor sobre la variable x y presione `F6` (SOLVE) para aproximar la raíz numérica por el método iterativo de la calculadora.

PREGUNTAS DE PRUEBA 2 (Con GDC)

30 min

Sección A

Pregunta 6 [6 pts]

La población de una comunidad de aves en una reserva natural se modela mediante la función $P(t) = 300e^{0,12t}$, donde t es el tiempo transcurrido en años desde el inicio del estudio. Un modelo lineal competidor predice que la población de otra especie en el mismo hábitat viene dada por $Q(t) = 85t + 350$.

(a) Escriba la ecuación matemática que debe plantearse para determinar el instante en que ambas poblaciones de aves son idénticas en número. [1]

(b) Utilizando su calculadora de pantalla gráfica (GDC), halle el valor de t para el cual las poblaciones coinciden. Aproxime su respuesta a tres cifras significativas. [3]

(c) Determine la cantidad exacta de aves que habrá en la reserva en el momento en que se produce dicha coincidencia poblacional. [2]

Pregunta 7 [6 pts]

Se define la función de comportamiento térmico industrial de un material mediante la regla analítica:

$$T(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}2x^2 + 6{,}8x + 15 \quad \text{para un dominio de control } x \in [0, 8]$$

(a) Utilizando la herramienta de raíces de su GDC, determine todos los valores de x para los cuales la temperatura del material es nula, es decir, $T(x) = 0$. [3]

(b) Ajuste los límites de su ventana de visualización gráfica (V-Window) para que el gráfico sea completamente visible en su calculadora. Indique los valores de `Ymin` e `Ymax` que utilizó para observar el punto mínimo local de la curva. [3]

Pregunta 8 [7 pts]

Considere las curvas representadas por las funciones trascendentes $y_1 = \ln(2x - 3) + 2$ e $y_2 = 5 - e^{-0{,}5x}$, definidas sobre sus dominios reales máximos correspondientes.

(a) Utilizando las herramientas automáticas de intersección de su calculadora gráfica, halle las coordenadas (x, y) del punto de contacto entre ambas curvas. Redondee sus resultados a tres cifras significativas. [4]

(b) Escriba la ecuación de la asíntota vertical de la primera curva y_1 y explique cómo limita geométricamente el dominio de resolución de la intersección. [3]

Sección B

Pregunta 9 [14 pts]

Un fabricante de juguetes mecánicos modela el volumen de producción diaria V (en cientos de unidades) y el costo logístico asociado C (en miles de dólares) en función del número de horas extras trabajadas diariamente h ($0 \leq h \leq 6$) según los siguientes modelos matemáticos:

$$V(h) = -0{,}4h^3 + 2{,}8h^2 + 1{,}2h + 5 \quad \text{y} \quad C(h) = 1{,}8h + 8{,}5$$

(a) Escriba la ecuación de planteamiento correspondiente a la igualdad de volumen de producción diaria con el costo logístico de producción diario, es decir, $V(h) = C(h)$. [2]

(b) Represente gráficamente ambas funciones en su GDC acotando el intervalo del dominio a $0 \leq h \leq 6$:

(I) Halle las coordenadas (h, y) de los puntos de intersección entre las curvas dentro del intervalo de horas extras permitido. [5]

(II) Determine el intervalo de horas extras h para el cual el volumen de producción $V(h)$ es estrictamente mayor que el costo logístico $C(h)$. [3]

(c) Calcule a partir de la gráfica de la calculadora el valor de horas extras h que maximiza el volumen de producción diaria, e indique el valor de dicho volumen máximo obtenido. [4]

Pregunta 10 [16 pts]

Considere la función racional de modelamiento acústico $f(x) = \dfrac{3x^2 - 12}{x^2 - 16}$, definida para un dominio de frecuencias reales positivas $x \in]0, \infty[\setminus \{-4, 4\}$.

(a) Halle analíticamente el intercepto de la función $f(x)$ con el eje horizontal de las x resolviendo de manera analítica la ecuación $f(x) = 0$. [3]

(b) Utilizando su GDC en una ventana de visualización adecuada, represente gráficamente la función $f(x)$:

(I) Escriba las ecuaciones de la asíntota vertical y la asíntota horizontal visibles en la calculadora. [4]

(II) Determine las coordenadas de los puntos donde la función acústica toma el valor de $y = 2$, planteando formalmente la ecuación correspondiente. [5]

(c) Justifique analíticamente o gráficamente por qué no existen puntos de intersección entre la curva $f(x)$ y la recta horizontal constante de ecuación $y = 3$. [4]

ALERTA DE EXAMINADOR

Evitar	Formato Oficial
Omitir la escritura de la ecuación planteada. Colocar directamente el resultado decimal arrojado por la GDC.	**SIEMPRE** escriba la ecuación original ($f(x) = g(x)$ o $f(x) = 0$) antes de usar la calculadora.
Redondear de manera descuidada las coordenadas intermedias de un cálculo de intersección.	Exprese los resultados con una precisión exacta o redondee a **tres cifras significativas (3 c.s.)**.